

# ECUACIONES BÁSICAS PARA EL ESTUDIO DEL AGUA EN LA ATMÓSFERA

**Julián David Rojo Hernández**

**I.C. MSc. PhD (c) Recursos Hidráulicos.**

## **Temperatura en la atmósfera**

$$T = T_0 - \alpha z \quad (1)$$

Para determinar el gradiente considere que la temperatura en la superficie terrestre es de 20°C sobre el nivel medio del mar, y de -55°C . En el tope de la troposfera:

$$z = 0 \rightarrow T = 20^\circ C$$

$$z = 12km \rightarrow T = -58^\circ C$$

Usando una relación lineal

$$\alpha = \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} = \frac{-58 - 20}{12 - 0} = -6.5^\circ C / km$$

$$T = T_0 - 6.5z$$

## **Temperatura media en Colombia**

En Colombia la temperatura superficial del aire está fuertemente condicionada, en todo el año, por la altura sobre el nivel del mar. El método de regionalización propuesto por Cenicafé (Chávez y Jaramillo, 1998) es una buena manera de estimar la temperatura media multianual en cualquier lugar del país.

Esta regionalización se elaboró para cada región geográfica tomando como información básica los registros de temperatura media mensual del aire en superficie de 1002 estaciones del país, de las cuales 626 pertenecen a la región Andina, obteniendo la siguiente relación:

$$T_{MEDIA} = 29.42 - 0.0061H$$

En otras regiones de Colombia:

Región Atlántica:

$$T_{MEDIA} = 27.72 - 0.0055H$$

Región Oriental (Orinoquía y Amazonía)

$$T_{MEDIA} = 27.37 - 0.0057H$$

Región Pacífica

$$T_{MEDIA} = 27.05 - 0.0057H$$

Donde  $T_{MEDIA}$  Corresponde a la temperatura media multianual (en °C) y H es la altura sobre el nivel del mar (m). Es de anotar que la dependencia lineal empírica expresada en las relaciones de Cenicafe concuerdan con el decrecimiento de la temperatura con la altura en condiciones adiabáticas (Vélez et al. 2000).

### Ley de gases ideales

Si se comprime un gas, manteniendo constante su temperatura, veremos que la presión aumenta al disminuir el volumen. Análogamente, si se expande un gas a temperatura constante, su presión disminuye al aumentar el volumen. Con buena aproximación, la presión de un gas varía en proporción inversa con el volumen. Esto implica que, a temperatura constante, el producto de la presión por el volumen de un gas es constante.

$PV = \text{constante}$  (a temperatura constante)

Esta ley se cumple aproximadamente por todos los gases a bajas densidades, pero, también, la temperatura absoluta de un gas a bajas densidades es proporcional a la presión a volumen constante, y de igual forma, la temperatura absoluta es proporcional al volumen del gas si se mantiene constante su presión, todo lo anterior se cumple en el vapor de agua y el aire seco

A bajas densidades, el producto  $PV$  es prácticamente proporcional a la temperatura  $T$ :

$$pV = CT \quad (2)$$

$C$  es una constante de proporcionalidad apropiada para una cantidad determinada del gas, que se puede reescribir como:

$$C = kN \quad (3)$$

$k$  recibe el nombre de constante de Boltzmann y posee el mismo valor para cualquier clase o cantidad de gas. En Sistema internacional (SI)  $k = 1.380650 \times 10^{-23}$  J/K ( $K$  representará la escala Kelvin).

Suele ser conveniente escribir la cantidad de gas en función del número de moles. Un mol de cualquier sustancia es la cantidad de materia que contiene una cantidad definida de moléculas. Dicha cantidad corresponde al número de Avogadro  $N_A = 6.022 \times 10^{23}$  moléculas/mol. Por tanto si se tienen  $n$  moles de una sustancia, el número de moléculas es  $N = nN_A$

$$N = nN_A \quad (4)$$

$$pV = knN_A T \quad (5)$$

Luego podríamos expresar la ley de gases ideales como

$$pV = nRT \quad (6)$$

Donde

$$R = kN_A \quad (7)$$

R se conoce universalmente con el nombre de constante de gases ideales y su valor se obtiene al multiplicar la constante de Boltzmann por el número de Avogadro, así pues:

$$R = (1.380650 \times 10^{-23} \text{ J / K }) (6.022 \times 10^{23} \text{ molecules / mol }) = 8.314 \text{ J / molK}$$

La masa de 1 mol se denomina masa molar  $M$  (A veces se utilizan los términos peso molecular o masa molecular.) y su valor para cada elemento se encuentra en la Tabla Periódica, por ejemplo, la masa molar del vapor de agua  $M_v$  se puede calcular como:

$$M_v = M(H_2O) = 2H + O = 2(1.007 \text{ g / mol}) + 15.999(\text{g / mol})$$

$$M_v = 17.991(\text{g / mol})$$

El aire seco está compuesto, de manera aproximada, en un 80% por Nitrógeno y un 20% por oxígeno. Así pues, la masa molecular del aire seco  $M_d$  se podrá aproximar como:

$$M_d = M(0.2O_2 + 0.8N_2) = 0.2[2(15.999)] + 0.8[2(14.007)] = 0.2(31.998 \text{ g / mol}) + 0.8(28.014 \text{ g / mol})$$

$$M_d = 0.2[2(15.999)] + 0.8[2(14.007)] = 0.2(31.998 \text{ g / mol}) + 0.8(28.014 \text{ g / mol})$$

$$M_d = 28.8 \text{ g / mol}$$

De lo anterior se puede inferir que el aire seco es más pesado que el vapor de agua, de tal suerte que por diferencia entre las densidades de los fluidos, el vapor de agua tiende a ascender en una columna de atmósfera.

Usando la definición de masa molar, para  $n$  moles de gas, se tiene la siguiente cantidad de masa  $m$ :

$$m = nM \quad (8)$$

Por tanto la densidad del gas se puede estimar como:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V} \quad (9)$$

Y gracias a dicha relación podemos reescribir la ley gases ideales en función de la densidad utilizando la siguiente relación:

$$n = \frac{\rho V}{M} \quad (10)$$

Haciendo algunas operaciones sobre la ecuación (10)

$$pV = nRT = \frac{\rho V}{M} RT$$

$$p = \rho \frac{R}{M} T$$

Para mejorar un poco la ecuación anterior, se puede modificar la constante de gases ideales de forma tal que para cada tipo de gas existe una constante  $R_{gas}$  definida como:

$$R_{gas} = \frac{R}{M_{gas}} \quad (11)$$

Luego

$$p = \rho_{gas} R_{gas} T \quad (12)$$

La ecuación (12) se conoce con el nombre de Ley de gases ideales y relata que la presión de un gas es directamente proporcional a la densidad de dicho gas y su temperatura.

### **Presión Atmosférica**

Se denomina Presión atmosférica a la presión ejercida por el aire húmedo (combinación de aire seco y vapor de agua) sobre el planeta. La presión atmosférica en un punto coincide numéricamente con el peso de una columna estática de aire con área de base unitaria que se extiende desde ese punto hasta el límite superior de la atmósfera.

*Aproximación (predimensionamiento) de la presión sobre el nivel del mar:*

A manera de aproximación, se puede asumir que la mayor concentración de gases en la atmósfera se da en la troposfera y por tanto la máxima elevación de la columna de gas es de 12km (12000 m.), y, para tener un orden de magnitud de la presión atmosférica en superficie terrestre, se puede asumir que el aire posee una densidad media de  $0.86 \text{ kg/m}^3$ .

La presión de una columna de aire estática en la troposfera sobre el nivel medio del mar sigue la ley hidrostática y por tanto:

$$p = \gamma h$$

$$\gamma = \rho g$$

$$\gamma = 0.86 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8.43 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$$

$$p = 8.43 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} (12000 \text{ m}) = 101136 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 101.23 \text{ kPa}$$

Las unidades de medida de presión:

Pascales (Pa): equivalentes a un Newton por metro cuadrado.

Hecto-Pascales (hPa): Equivalen a 100 ( $10^2$ ) Pa.

Kilo-pascales: Equivalentes a 1000 ( $10^3$ ) Pa.

Atmosfera (atm): Aproximadamente igual a la presión atmosférica sobre el nivel del mar

1 atm = 100 kPa.

Bar: Unidad de presión aproximadamente igual a una atmósfera (1 atm). Su símbolo es «bar». La palabra «bar» tiene su origen en «báros» (βάρος), que en griego significa «peso». Usualmente la presión se expresa en milibares ( milésima parte de un bar).

Así pues la presión media sobre el nivel del mar es:

1013.25 milibares, 101.325 kPa. 1013.25 hPa.

*Variación de la presión con la altura sobre el nivel del mar:*

Un valor de referencia importante a tener en cuenta, la presión atmosférica a nivel del mar, que con frecuencia se denota  $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$ .

Sin embargo, y pese a la simplificación anterior, es importante considerar que la densidad del aire disminuye conforme aumenta la altura, y por tanto solo se puede calcular la presión para diferentes elevaciones cuando se conoce la variación de la densidad del aire  $\rho$  en función de la altitud  $z$  o de la presión  $p$ . al ser la atmósfera un fluido se puede aplicar la ecuación hidrostática:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (13)$$

Además la atmósfera puede ser considerada un gas ideal y por tanto:

$$p = \rho RT \quad (14)$$

De donde:

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad (15)$$

Combinando las ecuaciones (14) y (15)

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p}{RT} g$$

Además es importante retomar la ecuación (1) a partir de la cual se define que la temperatura disminuye de manera proporcional con la elevación ( $T = T_0 - \alpha z$ ) y por tanto

$$dT = -\alpha dz$$

$$\frac{dT}{-\alpha} = dz$$

Luego

$$\frac{dp}{P} = -\frac{dT}{(-\alpha)RT} g$$

$$\frac{dp}{P} = \frac{dT}{T} \left( \frac{g}{\alpha R} \right)$$

Una ecuación diferencial sencilla cuya solución nos lleva a explicar la variabilidad de la presión en función de la altura:

$$p = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{g/\alpha R}$$

$$p = p_0 \left( \frac{T_0 - \alpha z}{T_0} \right)^{g/\alpha R} \quad (16)$$

### **Presión de vapor y densidad.**

La ley de presiones parciales de Dalton establece que la presión que ejerce un gas es independiente de la presencia de otros gases. Si la atmósfera está compuesta en su mayoría por aire húmedo la independencia establecida por la ley de Dalton permite analizar de manera separada la presión debida al vapor de agua, y la presión de vapor debida al aire seco. La ley de presiones parciales implicaría que la presión atmosférica  $p$  puede ser descompuesta como se muestra a continuación:

$$p = e + p_d \quad (17)$$

Donde  $e$  representa la presión del vapor de agua, estimada siguiendo la ley de gases ideales como:

$$e = \rho_v R_v T \quad (18)$$

y  $p_d$  corresponde la presión del vapor del aire seco, también gas ideal:

$$p_d = \rho_d R_d T \quad (19)$$

Aplicando la ley de presiones parciales de Dalton se tendría que:

$$p - e = \rho_d R_d T \quad (20)$$

Donde  $\rho_d$  es la densidad del aire seco que podría estimarse como:

$$\rho_d = \frac{p - e}{R_d T} \quad (21)$$

Siendo  $R_d$  es la constante de gas para el aire seco que según la ecuación (11) se estima como:

$$R_d = \frac{R}{M_d} = \frac{8.3114 \text{ J / mol K}}{0.0288 \text{ kg / mol}} \approx 287 \text{ J / kg mol}$$

Por la definición del  $R_{gas}$  de la ecuación (11) se tiene que:

$$R_{gas} M_{gas} = R = cte \quad (22)$$

Dicha relación permite redefinir la presión de vapor de agua  $e$  como una función de la constante de gases ideales para el aire seco que es mucho más conocida y aplicada en la ingeniería.

$$R_v M_v = R_d M_d \quad (23)$$

$$R_v = \frac{R_d M_d}{M_v} \quad (24)$$

$$e = \rho_v \frac{R_d}{M_v} \frac{T}{M_d} \quad (25)$$

$$e = \frac{\rho_v}{0.622} R_d T \quad (26)$$

La anterior ecuación, bastante importante, permite estimar la presión de vapor de agua, en función de la densidad del vapor de agua y la constante de gases ideales para el aire seco.

Muchas moléculas de diferentes gases pueden coexistir en un mismo volumen, lo que implica que la densidad para un volumen definido, la densidad del gas resultante será la suma de las densidades de los diferentes gases constitutivos de la mezcla, por ejemplo, la densidad del aire húmedo  $\rho_a$  es igual a la densidad del aire seco  $\rho_d$  más la densidad de vapor de agua  $\rho_v$ :

$$\rho_a = \rho_v + \rho_d \quad (27)$$

La densidad del vapor de agua puede estimarse al despejar la ecuación (26) como:

$$\rho_v = 0.622 \frac{e}{R_d T} \quad (28)$$

Entonces, la densidad se calcula al reemplazar las ecuaciones (21) y (28) en la ecuación (27).

$$\rho_a = \frac{p - e}{R_d T} + 0.622 \frac{e}{R_d T} \quad (29)$$

Y luego de un procesamiento se obtiene:

$$\rho_a = \frac{p}{R_d T} \left( 1 - 0.378 \frac{e}{p} \right) \quad (30)$$

### Presión de vapor de saturación

Para una temperatura de aire dada existe un máximo contenido de humedad que el aire puede tener y la presión de vapor correspondiente a dicha condición se denomina presión de vapor de saturación  $e_s$ . A esta presión de vapor las tasas de evaporación y condensación son iguales y su relación con la temperatura está dada por la curva de equilibrio líquido- vapor de Clausius Clapeyron:

$$e_s = 611 \exp \left( \frac{17.27T}{237.3 + T} \right)$$

Donde  $e_s$  es la presión de vapor de saturación en Pa, y  $T$  es la temperatura en grados Celsius.

### Humedad absoluta:

La humedad absoluta se define como la masa agua que posee un metro cubico de aire y es igual la densidad, y según esta definición sería igual a la densidad del vapor de agua:

$$\rho_v = 0.622 \frac{e}{R_d T}$$

### Humedad específica

Se define la humedad específica como la relación entre la masa de vapor agua y la masa de aire húmedo

$$q_v = \frac{m_v}{m_a} = \frac{\rho_v}{\rho_a}$$

$$q_v = \frac{0.622 \frac{e}{R_d T}}{\frac{p}{R_d T} \left( 1 - 0.378 \frac{e}{p} \right)}$$

En función de la distribución de los gases en la atmósfera, la presión ejercida por el vapor de agua comparada con la presión atmosférica bastante pequeña, el máximo valor alcanzado por  $e = 0.04p$  (la presión de vapor de agua representa el 4% de la presión atmosférica). Por tanto  $0.378e/p \approx 0$ .



$$q_v = \frac{0.622e}{p}$$

Y la cantidad de agua (en g, kg, etc) que existe en un kg de aire que posee la atmósfera.

### **Humedad relativa**

La cantidad de vapor de agua contenida en el aire, en cualquier momento determinado, normalmente es menor que el necesario para saturar el aire. La humedad relativa es el porcentaje de la humedad de saturación, que se calcula normalmente como la relación entre la presión de vapor  $e$  y la presión de vapor de saturación  $e_s$ , es decir:

$$H_R = \frac{e}{e_s}$$

Sin duda alguna la Humedad relativa del ambiente es uno de los términos más usados en meteorología, y dicho término viene a significar capacidad que tiene el aire de absorber más humedad.